

Одељак Педагошка пракса – математички кутак

Решени задаци Пилот матуре 1

Зорица Бегуш, проф.

1. На цртама упишите дате бројеве, тако да важе неједнакости

π 3,2 $|-3|$ 3,14 $\sqrt{15}$

$$\underline{|-3|} < \underline{3,14} < \underline{\pi} < \underline{3,2} < \underline{\sqrt{15}}$$

2. Колико има целих бројева који су решења неједначине $x^2 - 9 < 0$

- a) 2
b) 3
c) 4
d) 5
e) Више од 5

$$x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$



3. Другови Милан и Никола су се вратили са путовања. Милану је остало 3 евра и 1 долар, а Николи је остало 2 евра и 3 долара. Одлучили су да оду у мењачницу заједно и преостали новац замене у динаре. Милан је за своје евре и доларе добио 475 динара, а Никола 585 динара.

Колики је био курс евра, а колики курс долара тог дана ?

$$3x + y = 475$$

$$2x + 3y = 585$$

$$3x + y = 475$$

$$-7y = -840$$

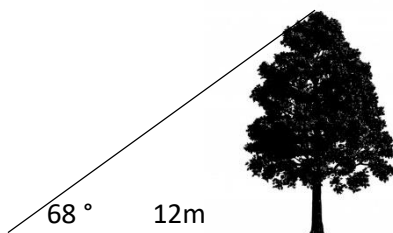
$$x = 120$$

$$y = 475 - 360 = 115$$

Курс евра био је 120 динара за 1 евро, а курс долара 115 динара за 1 долар.

4. Крајња тачка сенке дрвета приказаног на слици је у природи удаљена од њега 12 метара и из те тачке се дрво види под углом од 68° . Ако се зна да је $\text{ctg} 68^\circ \approx 0,404$ онда је приближна вредност висине дрвета

- a) 29,7m**
b) 15,1 m
c) 4,5 m
d) 21,6 m



$$\text{ctg} 68^\circ = \frac{12m}{\text{Visina drveta}}$$
$$\text{Visina drveta} = \frac{12m}{\text{ctg} 68^\circ} \approx \frac{12m}{0,404}$$
$$\approx 29,703$$

Заокружите слово испред тачног одговора

5. У кутији се налази пет истих парова црних и пет истих парова белих чарапа. У сваком пару се не разликују лева и десна. Колико чарапа је довољно да се извуче из кутије да би се сигурно могао саставити :

а) пар истобојних чарапа



Одговор и образложење:

Ако извучемо 2 чарапе могле би бити пар белих или пар црних или разнобојне (што нам не одговара захтеву задатка). Извлачењем треће чарапе узимамо или још једну белу или још једну црну и на тај начин смо сигурно извукли један пар.



Одговор је : 3 чарапе

б) пар црних чарапа

Одговор и образложење :

Ако извучемо 10 чарапа ,у најгорем случају могле би све бити беле, ако извучемо 11 чарапа могле би у најгорем случају бити све беле и једна црна.

Сигуран случај да ћемо извући пар црних чарапа је 12. (На слици приказан случај са највећим бројем извучених белих чарапа)



Одговор је : 12 чарапа

На основу датог текста решите задатке 6 и 7.

Постоји више математичких модела којима научници желе да предвиде како ће се кретати број становника у свету у наредним годинама.

У једном угледном научном часопису је разматран следећи модел

$$P(t) = \frac{14647763000}{1 + 3,829118 \cdot 0,772562^{0,1t}}$$

Где је t време у годинама протекло од почетка 1960. године, а $P(t)$ број становника на планети.

6. Колико ће према овом моделу бити становника почетком 2050, године ?
Одговор заокружити на најближи природан број становника.

$$t = 2050 - 1960 = 90$$

$$P(90) = \frac{14647763000}{1 + 3,829118 \cdot 0,772562^{0,1 \cdot 90}}$$

$$P(90) \approx 10649789855,654898$$

$$\approx 10649789856$$

Према наведеном моделу ће 2050. године на планети бити 10.649.789.856 становника.

7. Када ће према овом моделу број становника достићи 9 милијарди ?
Одговор заокружити на цео број година.

(Можете користити вредности $\log_{10} 0,772562 = -0,112067$)
 $\log_{10} 0,163884 = -0,785463$

$$9000000000 = \frac{14647763000}{1 + 3,829118 \cdot 0,772562^{0,1 \cdot t}}$$

$$0,772562^{0,1 \cdot t} = \frac{14647763000 \div 9000000000 - 1}{3,829118}$$

$$0,772562^{0,1 \cdot t} = 0,163884 \quad / \log_{10}$$

$$0,1 \cdot t \cdot \log_{10} 0,772562 = \log_{10} 0,163884$$

$$0,1 \cdot t \cdot (-0,112067) \approx -0,785463$$

$$0,1 \cdot t \approx 7,0089$$

$$t \approx 70,089 \approx 70$$

Према наведеном моделу број становника на планети ће достићи 9 милијарди
2030. године.

8. Бициклиста вози према Београду. Када би возио брзином од 10 километара на сат, стигао би у 13 часова, а када би возио 15 километара на сат, стигао би у 11 часова. Којом брзином треба да вози бициклиста да би у Београд стигао тачно у подне тог дана ?

Прикажите поступак

t – време потребно да бициклиста стигне у подне

$$s = 10 \text{ km/h} \cdot (t + 1h)$$

$$s = 15 \text{ km/h} \cdot (t - 1h)$$

$$10 \text{ km/h} \cdot (t + 1h) = 15 \text{ km/h} \cdot (t - 1h)$$

$$10t + 10 = 15t - 15$$

$$5t = 25$$

$$t = 5h$$

$$s = 10 \text{ km/h} \cdot (5h + 1h) = 60 \text{ km}$$

$$s = v \cdot t$$

$$v = \frac{s}{t} = \frac{60 \text{ km}}{5h}$$

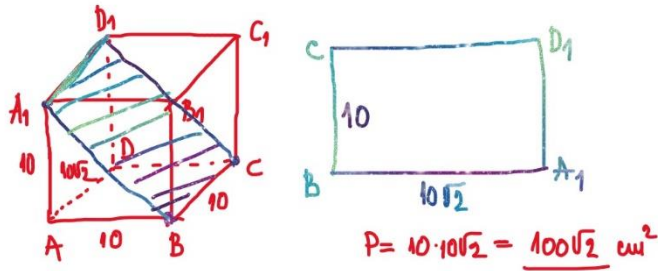
$$v = 12 \text{ km/h}$$

Треба да вози брзином 12km/h.

9. Дужина страница коцке $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ је 10cm. Коцка је пресечена равни α која кроз тачке B, C и A_1 .

а) Одредити површину пресека равни α и коцке

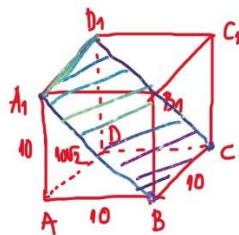
Прикажите поступак



Површине пресека равни α и коцке је једнака $100\sqrt{2} \text{ cm}^2$

б) Раван дели коцку на два дела.Одреди запремину оног дела који садржи теме C_1

Прикажите поступак



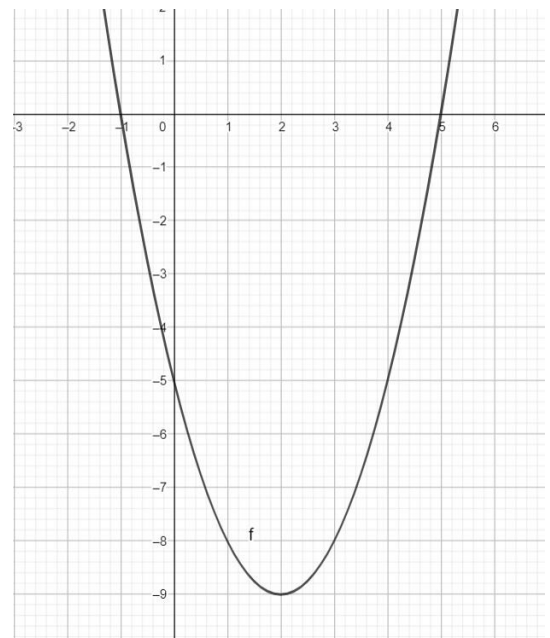
Запремина је 500 cm^3 .

$$V_{B_1 A_1 C C_1 D_1} = \frac{1}{2} V_{ABCD A_1 B_1 C_1 D_1} = \frac{1}{2} \cdot 10^3 = 500 \text{ cm}^3$$

10. График функције $y = ax^2 + bx + c$ приказан је на слици

A: Заокружите слово испред тачног одговора

- а) $a > 0$, $c > 0$
б) $a > 0$, $c < 0$
 c) $a < 0$, $c > 0$
 d) $a < 0$, $c < 0$



Б: На основу графика одредите коефицијенте а, b, и с

Нуле функције су $x_1 = -1$, $x_2 = 5$

$$c = -5$$

$$y = ax^2 + bx - 5$$

$$0 = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) - 5$$

$$0 = a \cdot 5^2 + b \cdot 5 - 5$$

$$a - b = 5$$

$$25a + 5b = 5$$

$$6a = 6, \quad a = 1, \quad b = -4$$

$$y = x^2 - 4x - 5 \quad T(\alpha, \beta) \quad \alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2} = 2 \quad \beta = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{-20 - 16}{4} = -9 \quad T(2, -9)$$

$$a = \underline{1}$$

$$b = \underline{-4}$$

$$c = \underline{-5}$$

11. Профит (π) једног монополског предузећа зависи од цене робе ($p \geq 0$) по којој продаје своју јединицу производа. Та зависност дата је функцијом

$$\pi(p) = -p^2 + 12p - 2$$

а) Одредити профит предузећа ако оно продаје производ по цени $p=2$.

$$\pi(2) = -2^2 + 12 \cdot 2 - 2 = 18$$

Одговор: 18

б) Колики профит (губитак) ће имати то предузеће ако свој производ поклања купцима?

Ако се производ поклања, онда је његова цена 0

$$\pi(0) = -0^2 + 12 \cdot 0 - 2 = -2$$

Одговор: -2 (губитак 2)

с) Одредити цену по којој то предузеће треба да продаје своју робу како би остварило највећи профит. Колико износи максимални профит?

$$\pi(p) = -p^2 + 12p - 2 \quad \max \pi(p) = \frac{4 \cdot (-1) \cdot (-2) - 12^2}{4 \cdot (-1)} = 34 \quad p = -\frac{12}{2 \cdot (-1)} = 6$$

Посматрамо теме квадратне функције π , $T(\alpha, \beta)$

(Може да се решава на други начин, помоћу нуле првог извода функције

$$\pi'(p) = -2p + 12 = 0, \quad p = 6)$$

Одговор: Предузеће остварује највећи профит 34 за цену $p=6$.

12. У цену производа које купујемо у продавници је урачунат порез на додатну вредност (ПДВ) који на већину робе износи 20%, Анита и Иван су купили колица за бебу чија је цена са ПДВ-ом 36000 динара. ПДВ за колица је 20 %. Они имају право на поврат ПДВ-а на крају године за опрему за бебе и поднели су захтев за поврат ПДВ-а за куповину колица. Колико ће новца они добити по том основу ?

Прикажите поступак

x – цена без ПДВ – а

$1,2 \cdot x$ – цена са ПДВ – ом

$$1,2 \cdot x = 36000 \quad , \quad x = 30000$$

$$36000 - 30000 = 6000$$

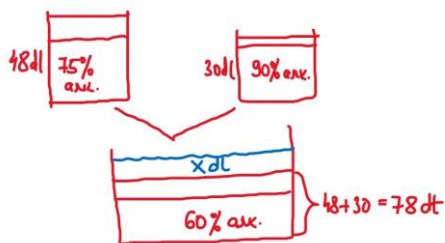
На крају године по основу повраћаја ПДВ-а на опрему за бебе Анита и Иван ће добити 6000 динара.

13. Помешано је 48 децилитара 75% -ног алкохола са 30 децилитара 90%-ног алкохола. Колико децилитара воде треба додати да би се добио 60%-ни алкохол ?

$$0,75 \cdot 48dl + 0,90 \cdot 30dl = 0,60 \cdot (78dl + x)$$

$$63 = 46,8 + 0,60 \cdot x$$

$$x = 27dl$$



Треба додати 27 децилитара воде да би се добио 60%-ни алкохол.

14. Одредити тачке пресека кривих $y^2 = x + 4$ и $x + y = 2$ у Декартовој равни.

Прикажите поступак

$$x = y^2 - 4$$

$$y = -x + 2$$

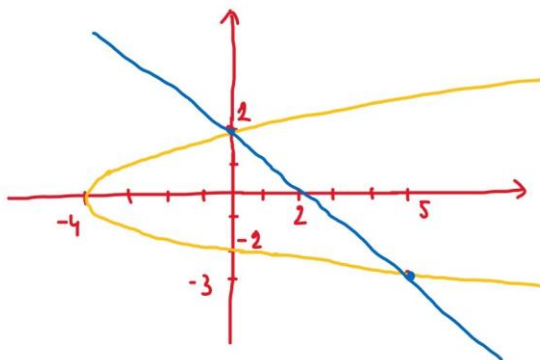
$$x = (-x + 2)^2 - 4$$

$$y = -x + 2$$

$$x = x^2 - 4x + 4 - 4$$

$$y = -x + 2$$

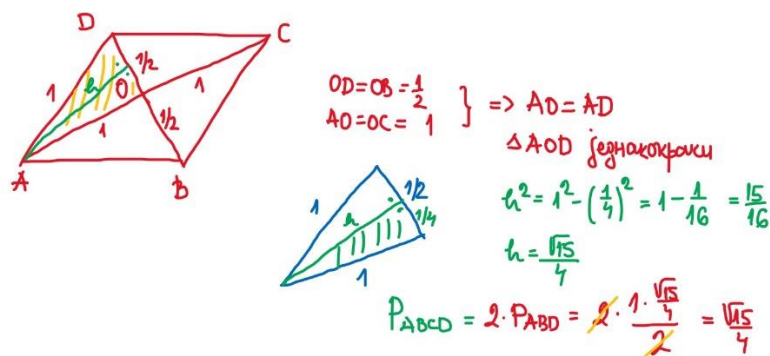
$$0 = x^2 - 5x \quad , \quad \langle x = 0, y = 2 \rangle, \langle x = 5, y = -3 \rangle$$



Тачке пресека су : (0,2) и (5,-3)

15. Одредити површину паралелограма ABCD ако је AD=BD=1cm и AC=2cm.

Прикажите поступак



Површина паралелограма је $\frac{\sqrt{15}}{4} \text{ cm}^2$.

16. Заокружите слово испред тачног одговора

Збир свих вредности реалног параметра а са које једначина $(a-2)x^2 - 2\sqrt{6}x + a-1 = 0$ има јединствено решење је :

- | | | |
|-------------|---|---|
| a) -1 | I) $a-2=0$, $a=2$ | II) $a-2 \neq 0$, $a \neq 2$ |
| b) 5 | $0 \cdot x^2 - 2\sqrt{6} \cdot x + 2 - 1 = 0$ | $D = 0$ |
| c) 3 | $2\sqrt{6} \cdot x = 1$ | $(2\sqrt{6})^2 - 4 \cdot (a-2) \cdot (a-1) = 0$ |
| d) 8 | $x = \frac{1}{2\sqrt{6}} \in \mathbb{R}$ | $24 - 4 \cdot (a^2 - 3a + 2) = 0$ |
| e) -6 | | $a^2 - 3a - 4 = 0$. $a=4$, $a=-1$ |
- $2+4+(-1)=5$**

Провера за $a = 4$

$$2x^2 - 2\sqrt{6}x + 3 = 0$$

$$(\sqrt{2}x - \sqrt{3})^2 = 0, \quad x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \in \mathbb{R}$$

Провера за $a = -1$

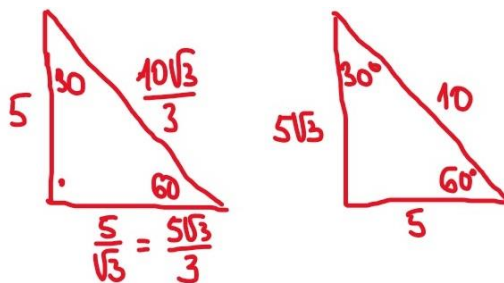
$$-3x^2 - 2\sqrt{6}x - 2 = 0$$

$$(\sqrt{3}x + \sqrt{2})^2 = 0, \quad x = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \in \mathbb{R}$$

17. Одредити дужине страница свих правоуглих троуглова чија је једна катета 5cm, а оштар угао α решење једначине $\sin^2 \alpha - 3\cos^2 \alpha = 0$

Прикажите поступак

$\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ $\sin^2 \alpha - 3 \cdot \cos^2 \alpha = 0$
 $\sin \alpha > 0$ $\sin^2 \alpha - 3 \cdot (1 - \sin^2 \alpha) = 0$
 $4 \cdot \sin^2 \alpha = 3$
 $\sin^2 \alpha = \frac{3}{4}$
 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\alpha = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$



Одговор : Троугао 1: $a = 5 \text{ cm}$, $b = \frac{5\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$, $c = \frac{10\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$

Троугао 2 : $a = 5\sqrt{3} \text{ cm}$, $b = 5 \text{ cm}$, $c = 10 \text{ cm}$

18. Заокружите слово испред тачног одговора

Ако је $x=0$ једно решење једначине $e^{2ax} - ae^{ax} + 2 = 0$, где је a реални параметар, онда друго решење једначине припада интервалу :

a) $\left[-\frac{1}{2}, 0\right)$ b) $\left[0, \frac{1}{5}\right)$ **c) $\left[\frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right)$** d) $\left[\frac{1}{2}, 2\right)$ e) $[2, 5)$

$$x = 0 \quad e^0 - a \cdot e^0 + 2 = 0 \quad t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$1 - a + 2 = 0 \quad (t - 1) \cdot (t - 2) = 0$$

$$a = 3 \quad t_1 = 1, \quad t_2 = 2$$

$$e^{6x} - 3 \cdot e^{3x} + 2 = 0 \quad e^{3x} = 1, \quad e^{3x} = 2$$

$$e^{3x} = t, t > 0 \quad x = 0, \quad 3x = \ln 2, \quad x = \frac{\ln 2}{3} \approx 0,23$$

19. Ако је $f(x) = \log_6 x + 3 \log_3(9x)$ и $x > 0$, израчунати $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$

Прикажите поступак

$$\begin{aligned} f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) &= \log_6 x + 3 \cdot \log_3(9x) + \log_6 \frac{1}{x} + 3 \cdot \log_3\left(9 \cdot \frac{1}{x}\right) \\ &= \log_6 x + 3 \cdot (\log_3 9 + \log_3 x) - \log_6 x + 3 \cdot (\log_3 9 - \log_3 x) \\ &= \log_6 x + 3 \cdot \log_3 9 + 3 \cdot \log_3 x - \log_6 x + 3 \cdot \log_3 9 - 3 \cdot \log_3 x \\ &= 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 12 \end{aligned}$$

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \underline{12}$$

20. Основа пирамиде је троугао ABC а врх тачка S. Раван α садржи теме C, сече бочну ивицу SA у тачки M и бочну ивицу SB у тачки N тако да је $SM = \frac{1}{2} SA$ и $SN = \frac{1}{3} SB$. Израчунајте однос запремина дате тростране пирамиде SMNC и пирамиде SABC.

Прикажите поступак

$$\begin{aligned} V_{SMNC} &= \frac{P_{\Delta MNS} \cdot H_p}{3} \\ V_{SABC} &= \frac{P_{\Delta ABS} \cdot H_p}{3} \quad V_{SMNC} : V_{SABC} = P_{\Delta MNS} : P_{\Delta ABS} \\ x:y &= 1:3 \quad P_{\Delta MNS} = \frac{SM \cdot x}{2} \quad P_{\Delta ABS} = \frac{2 \cdot SM \cdot y}{2} = SM \cdot 3x \\ y &= 3x \quad V_{SMNC} : V_{SABC} = \frac{SM \cdot x}{2} : (SM \cdot 3x) = \frac{1}{2} : 3 = \boxed{1:6} \end{aligned}$$

$$V_{CSMN} : V_{CSAB} = \underline{1:6}$$

